数理解析研究所講究録 1203 巻 2001 年 97-108

Painlevé V 方程式の有理解と universal character

同志社大学工学部　増田 哲　(Tetsu Masuda)
広島大学工学部　太田 泰広　(Yasuhiro Ohta)
同志社大学工学部　梶原 健司　(Kenji Kajiwara)

1 はじめに

1.1 Painlevé 方程式とその古典解

Painlevé 方程式は，新しい特殊関数を探し出すという動機の下に前世紀末に発見された，非自明な 6 種の 2 階非線形常微分方程式である．最近，Painlevé 方程式の解の超越性が Umemura たちによって最終的に証明された [24, 22]．しかしながら，方程式中のパラメータが特別な値をとる場合には、特殊関数解や代数解のような古典解が存在することが知られており，Painlevé 方程式の古典解を調べることは，興味深く重要な問題である．

Painlevé 方程式は，(P_{I} を除いて) Bäcklund 変換をもち，その全体は，アフィン・ワイル群と同型になることが知られている [18, 19, 20, 21]．したがって，適当な解から出発して Bäcklund 変換を施していけば，次々と高次の解を求めることができる．P_{II}

$$y''=2y^3+ty+b-\frac{1}{2},\quad {}'=\frac{d}{dt}, \tag{1.1}$$

を例に説明しよう．P_{II} の Bäcklund 変換は，

$$\begin{aligned}
S:&\quad S(y)=y+\frac{b}{y'+y^2+t/2}, && S(b)=-b,\\
T_+:&\quad T_+(y)=-y-\frac{b}{y'+y^2+t/2}, && T_+(b)=b+1,\\
T_-:&\quad T_-(y)=-y+\frac{b-1}{y'-y^2-t/2}, && T_-(b)=b-1,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

で与えられる．方程式から直ちに，

$$y=0,\quad b=\frac{1}{2}, \tag{1.3}$$

が解であることがわかるが，Bäcklund 変換 T_- を繰り返し施すことにより，

$$\begin{aligned}
&y=\frac{1}{t},\quad b=-\frac{1}{2},\\
&y=-\frac{1}{t}+\frac{3t^2}{t^3+4},\quad b=-\frac{3}{2},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

などと，P_{II} の有理解が順次計算されていく．

原理的には，こうしたやり方でこのほかの Painlevé 方程式の特殊解についても構成することができるが，$P_{\mathrm{III}}, P_{\mathrm{IV}}, \cdots$ と進むにつれ方程式も Bäcklund 変換もどんどん複雑となるので，実際にはあまり見通しがよくない．しかしながら，Noumi-Yamada により最近提出された対称形式の理論によって，これら Bäcklund 変換の構造を統一的に理解することができ，適当な seed 解から出発して特殊解を組織的に構成することも可能となった．

さて次に問題となるのは，どのようにして seed 解を見つければよい
である．実は，Painlevé 方程式の古典解を対称性の観点から捉えると
の特別な位置に存在するという，特徴的な描像が成り立つことが明ら
体的には，特殊関数解は基本領域のワイル群鏡映面に，代数解は基本
ているのである．また，特に代数解（有理解）に関しては，Umemur

- Dynkin 図形の自己同型に対応する変換の固定点上には代数解（

ことが観察されている [23].

Umemura らは，P_{III}, P_{V}, P_{VI} について，このような代数解を系
に付随してある種の特殊多項式が現れることを示し（P_{II}, P_{IV} につい
Vorob'ev, Okamoto による先駆的な研究がある [25, 20]），さらに，
が興味深い組合せ論的性質をもつことを見出した [23, 13].

これらの特殊多項式に関するひとつの重要な事実は，これらが Sc
して捉えられるということである（ただし P_{VI} については，まだよく
実際，P_{II}, P_{III}, P_{IV} および P_{V}（の一部）については，Schur 関数を
が知られている [5, 3, 6, 14, 15].

1.2 Painlevé 方程式の有理解と Schur 関数

ここでは，Jacobi-Trudi 公式により Schur 関数を定義しよう．任意の
が与えられたとき，Schur 関数は，

$$S_\lambda(t) = \begin{vmatrix} p_{\lambda_1} & p_{\lambda_1+1} & \cdots & p_{\lambda_1+n-1} \\ p_{\lambda_2-1} & p_{\lambda_2} & \cdots & p_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\lambda_n-n+1} & p_{\lambda_n-n+2} & \cdots & p_{\lambda_n} \end{vmatrix},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)\eta^k = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j\eta^j\right), \quad p_k(t) = 0 \text{ for } k < 0$$

で定義される $t = (t_1, t_2, t_3, \cdots)$ についての多項式である．Schur 関数に

- 定義から直ちにわかるように，t_k の重みを k と定義すれば，p_k
  式であり，さらに S_λ は $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ 次の同次多項式である．
- p_k は次の漸化式を満足する．
  $$\frac{\partial p_k}{\partial t_j} = p_{k-j},$$
- Schur 関数は KP ヒエラルキーと呼ばれる無限個の双線形方程式
  [2].

KP ヒエラルキーの理論では，解に制限を加えることによって t_l, t_{2l}, t
す操作を l-reduction と呼ぶ．Schur 関数に対しては，分割として特

Young 図形に対応する分割）を考えることによって l-reduction を実現することができる．例えば，分割 $\lambda=(n,n-1,\cdots,1)$ に対応した Schur 関数

$$S_\lambda=\begin{vmatrix} p_n & p_{n+1} & \cdots & p_{2n-1} \\ p_{n-2} & p_{n-1} & \cdots & p_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{-n+2} & p_{-n+3} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

は，(1.7) から容易にわかるように $t_2,t_4,\cdots$ に依存しない．(1.8) を 2-reduced Schur 関数と呼ぶ．

先にも述べたように，Painlevé 方程式の有理解を特徴づける特殊多項式は，Schur 関数を用いて表すことができる．例えば，$\mathrm{P_{II}}$ および $\mathrm{P_{III}}$ の有理解は 2-reduced Schur 関数で，$\mathrm{P_{IV}}$ の有理解は 3-reduced Schur 関数で表されることが明らかにされている [5, 3, 6, 14].

Noumi-Yamada は対称性の観点から Painlevé 方程式を一般化し，$A_{l-1}^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群対称性をもつ（高階）Painlevé 型方程式を導出した（$l=2,3,4$ のときは，それぞれ $\mathrm{P_{II}}, \mathrm{P_{IV}}, \mathrm{P_V}$ である）．さらに，それらの τ-関数 (正確には τ-コサイクル) が，一般化された Jacobi-Trudi 公式による表示をもち，$A_{l-1}^{(1)}$ 型の場合には l-reduction の構造を有することが明らかにされている [16, 17, 26]. 有理解などの具体的な表示を得たい場合には，この一般化された Jacobi-Trudi 表示において，然るべき特殊化を行えばよい．実際に，$\mathrm{P_{II}}, \mathrm{P_{IV}}$ の有理解は，こうした手続きによっても得ることができる [12].

本稿では $\mathrm{P_V}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{(y-1)^2}{2t^2}\left(\kappa_\infty^2 y-\frac{\kappa_0^2}{y}\right)-(\theta+1)\frac{y}{t}-\frac{y(y+1)}{2(y-1)}, \tag{1.9}$$

の有理解を扱う．もちろん，$\mathrm{P_V}$ の有理解に対しても，上と同様の手続きによって Jacobi-Trudi 型の行列式表示を構成することができる (これについては 4 章で触れる). しかしながら，われわれはこれとは独立に，まったく異なる結果を得た．

本稿では，対称形式の枠組で $\mathrm{P_V}$ の有理解の族（ただし，特殊関数解の特別なケースを除く）を構成することを考え，それらが Schur 関数のひとつの一般化である universal character を用いて表されることを示す．

2 $\mathrm{P_V}$ の対称形式

有理解を具体的に構成する前に，その準備として $\mathrm{P_V}$ とその Bäcklund 変換の対称形式による記述について述べておこう．$\mathrm{P_V}$ の対称形式は，

$$\begin{aligned} f_0' &= f_0f_2(f_1-f_3)+\left(\frac{1}{2}-\alpha_2\right)f_0+\alpha_0 f_2, \\ f_1' &= f_1f_3(f_2-f_0)+\left(\frac{1}{2}-\alpha_3\right)f_1+\alpha_1 f_3, \\ f_2' &= f_2f_0(f_3-f_1)+\left(\frac{1}{2}-\alpha_0\right)f_2+\alpha_2 f_0, \\ f_3' &= f_3f_1(f_0-f_2)+\left(\frac{1}{2}-\alpha_1\right)f_3+\alpha_3 f_1, \end{aligned} \qquad {}'=t\frac{d}{dt}, \tag{2.1}$$

で与えられる．ここで，f_0, f_1, f_2, f_3 が未知関数，$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ はパラメータで，

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \tag{2.2}$$

を満たすものとする．方程式と整合的に

$$f_0 + f_2 = f_1 + f_3 = \sqrt{t}, \tag{2.3}$$

と規格化できて，

$$y = -\frac{f_3}{f_1}, \tag{2.4}$$

についての方程式を書き下せば，$\mathrm{P_V}$ (1.9) が得られる．パラメータの対応は，

$$\kappa_\infty = \alpha_1, \quad \kappa_0 = \alpha_3, \quad \theta = \alpha_2 - \alpha_0 - 1, \tag{2.5}$$

となる．

$\mathrm{P_V}$ の Bäcklund 変換は，対称形式を用いると，

$$\begin{aligned}
&s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \quad s_i(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i \ (j = i \pm 1), \quad s_i(\alpha_j) = \alpha_j \ (j \neq i, i \pm 1),\\
&s_i(f_i) = f_i, \qquad s_i(f_j) = f_j \pm \frac{\alpha_i}{f_i} \ (j = i \pm 1), \quad s_i(f_j) = f_j \ (j \neq i, i \pm 1),\\
&\pi(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \quad \pi(f_j) = f_{j+1},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

と与えられる（添字は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の元とみる）．これらの変換は微分と可換であり，関係式

$$\begin{gathered}
s_i^2 = 1, \quad s_i s_j = s_j s_i \ (j \neq i, i \pm 1), \quad s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \ (j = i \pm 1),\\
\pi^4 = 1, \quad \pi s_j = s_{j+1} \pi,
\end{gathered} \tag{2.7}$$

を満たす．変換 s_i により生成される群 $W = < s_0, s_1, s_2, s_3 >$ は $A_3^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群と呼ばれている（$\widetilde{W} = < s_0, s_1, s_2, s_3, \pi >$ は拡大アフィン・ワイル群）．これらの表現は，次の変換公式

$$s_i(\tau_j) = \tau_j \ \ (i \neq j), \quad s_i(\tau_i) = f_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad \pi(\tau_i) = \tau_{i+1}, \tag{2.8}$$

により，τ-関数のレベルにまで持ち上げることができる．$\mathrm{P_V}$ の変数 y を τ-関数を用いて表すと，(2.4) により，

$$y = -\frac{\tau_3 s_3(\tau_3)}{\tau_1 s_1(\tau_1)}, \tag{2.9}$$

となる．

関係式 (2.8) により，τ-関数に対するさまざまな双線形関係式を導くことができる．幾つか書き下すと，規格化条件 (2.3) からは，

$$\begin{aligned}
\tau_0 s_0(\tau_0) + \tau_2 s_2(\tau_2) &= \sqrt{t}\ \tau_1 \tau_3,\\
\tau_1 s_1(\tau_1) + \tau_3 s_3(\tau_3) &= \sqrt{t}\ \tau_0 \tau_2,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

が，変数 f_i に対する Bäcklund 変換 (2.6) からは，

$$\begin{aligned}
\tau_0 s_0 s_1(\tau_1) &= s_0(\tau_0) s_1(\tau_1) + \alpha_0 \tau_2 \tau_3,\\
\tau_1 s_1 s_0(\tau_0) &= s_0(\tau_0) s_1(\tau_1) - \alpha_1 \tau_2 \tau_3,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

などが得られる.

さらに，平行移動演算子 T_i $(i=0,1,2,3)$ を

$$T_1 = \pi s_3 s_2 s_1, \quad T_2 = s_1 \pi s_3 s_2, \quad T_3 = s_2 s_1 \pi s_3, \quad T_0 = s_3 s_2 s_1 \pi, \tag{2.12}$$

と定義しよう．これらは互いに可換で $T_1T_2T_3T_0 = 1$ を満たし，さらに，パラメータ α_i $(i=0,1,2,3)$ に対して

$$T_i(\alpha_{i-1}) = \alpha_i + 1, \quad T_i(\alpha_i) = \alpha_i - 1, \quad T_i(\alpha_j) = \alpha_j \ (j \neq i,\ i-1), \tag{2.13}$$

のように作用する．T_i による変換は特に Schlesinger 変換と呼ばれることがある．簡単のため

$$\tau_{k,l,m,n} = T_1^k T_2^l T_3^m T_0^n(\tau_0), \quad k,l,m,n \in \mathbb{Z}, \tag{2.14}$$

と表記し，さらに，因子 $\phi_{k,l,m,n}$ を

$$\tau_{k,l,m,n} = \phi_{k,l,m,n}\tau_0 \left(\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)^k \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^l \left(\frac{\tau_3}{\tau_2}\right)^m \left(\frac{\tau_0}{\tau_3}\right)^n, \tag{2.15}$$

で導入しよう.（拡大）アフィン・ワイル群 $\widetilde{W}$ の任意の元に対して，$\phi_{k,l,m,n}$ は α_i，f_i の整数係数多項式となり，一般化された Jacobi-Trudi 公式を用いて表されることが知られている [26]．この因子 $\phi_{k,l,m,n}$ は，τ-コサイクルと呼ばれている．また，

$$T_1^k T_2^l T_3^m T_0^n(y) = -\frac{\phi_{k,l,m,n-1}\phi_{k,l,m-1,n}}{\phi_{k+1,l,m,n}\phi_{k,l+1,m,n}}, \tag{2.16}$$

である．

3 有理解の構成と行列式表示

前節の準備に基づいて，$\mathrm{P_V}$ の有理解を構成しよう．計算や証明の詳細については文献 [10] を参照していただくことにして，ここでは概略だけを述べる．まずは，Dynkin 図形の自己同型の固定点を考えることにより，seed 解を求めよう．変換 π^2 の固定点を考えると，s をパラメータとして，

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{2} - s, s, \frac{1}{2} - s, s\right), \quad f_i = \frac{\sqrt{t}}{2}, \quad (i=0,1,2,3), \tag{3.1}$$

が方程式 (2.1)-(2.2) の解であることがわかる．これは，$\mathrm{P_V}$ (1.9) の解としては，

$$y = -1, \quad \kappa_\infty = s, \quad \kappa_0 = s, \quad \theta = -1, \tag{3.2}$$

に相当する．

次に，seed 解 (3.1) に Bäcklund 変換（Schlesinger 変換）を施して $\mathrm{P_V}$ の有理解の族を構成することを考える．$T_1T_2T_3T_0 = 1$ より，独立な方向 T_2, T_3, T_0 を選んで $\phi_{0,l,m,n} =$

$\phi_{l,m,n}$ と記述することにしよう．小さな l,m,n に対して $\phi_{l,m,n}$ を具体的に計算すると，$U_{l,m,n}=U_{l,m,n}(t,s)$ を t,s についての多項式として，

$$\phi_{l,m,n}=\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{(m-n-l-1)(m-n-l)/2}U_{l,m,n}, \tag{3.3}$$

となることが観察される．また，Bäcklund 変換 T_2,T_3,T_0 のうち，T_2 方向についてはパラメータ s の再定義と T_0 の作用により吸収できるので，結局は T_3,T_0 の 2 方向のみの Bäcklund 変換を考えればよいことがわかる．具体的には，

$$U_{1,m,n}(t,s)=U_{0,m,n-1}(t,s+1),\quad U_{-1,m,n}(t,s)=U_{0,m,n+1}(t,s-1), \tag{3.4}$$

であることが示せるので，$U_{0,m,n}=U_{m,n}$ と書こう．漸化式

$$\begin{aligned} c_{m+1}c_{m-1}&=\left(m+\frac{1}{2}\right)c_m^2,\quad c_{-1}=c_0=1,\\ d_{n+1}d_{n-1}&=-\left(n+\frac{1}{2}\right)d_n^2,\quad d_{-1}=d_0=1,\end{aligned} \tag{3.5}$$

で定まる定数 c_m,d_n により，

$$U_{m,n}(t,s)=c_md_nS_{m,n}(t,s), \tag{3.6}$$

とスケールすると，$S_{m,n}$ を行列式を用いて表すことができる．

定理 3.1 多項式 $p_k=p_k(t,s),q_k=q_k(t,s)$ を

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t,s)\eta^k&=\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}t_j^{(1)}\eta^j\right),\quad p_k=0 \text{ for } k<0,\\ \sum_{k=0}^{\infty}q_k(t,s)\eta^k&=\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}t_j^{(2)}\eta^j\right),\quad q_k=0 \text{ for } k<0,\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$t_j^{(1)}=-\frac{t}{2}+\frac{2s-m+n}{j},\quad t_j^{(2)}=\frac{t}{2}+\frac{2s-m+n}{j}, \tag{3.8}$$

で定義する．さらに，$m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，多項式 $S_{m,n}=S_{m,n}(t,s)$ を行列式

$$S_{m,n}(t,s)=\begin{vmatrix} q_1 & q_0 & \cdots & q_{-m+2} & q_{-m+1} & \cdots & q_{-m-n+3} & q_{-m-n+2}\\ q_3 & q_2 & \cdots & q_{-m+4} & q_{-m+3} & \cdots & q_{-m-n+5} & q_{-m-n+4}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ q_{2m-1} & q_{2m-2} & \cdots & q_m & q_{m-1} & \cdots & q_{m-n+1} & q_{m-n}\\ p_{n-m} & p_{n-m+1} & \cdots & p_{n-1} & p_n & \cdots & p_{2n-2} & p_{2n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ p_{-n-m+4} & p_{-n-m+5} & \cdots & p_{-n+3} & p_{-n+4} & \cdots & p_2 & p_3\\ p_{-n-m+2} & p_{-n-m+3} & \cdots & p_{-n+1} & p_{-n+2} & \cdots & p_0 & p_1 \end{vmatrix}, \tag{3.9}$$

で定義する．$m,n\in\mathbb{Z}_{<0}$ に対しては，

$$\begin{aligned} S_{m,n}(t,s)&=(-1)^{m(m+1)/2}S_{-m-1,n}(t,s-m-1/2),\\ S_{m,n}(t,s)&=(-1)^{n(n+1)/2}S_{m,-n-1}(t,s+n+1/2).\end{aligned} \tag{3.10}$$

とする．このとき，

$$y = -\frac{S_{m,n-1}(t,s)S_{m-1,n}(t,s)}{S_{m-1,n}(t,s-1)S_{m,n-1}(t,s+1)}, \tag{3.11}$$

は，$P_{\rm V}$ (1.9) の有理解を与える．ただし，パラメータの値は，

$$\kappa_\infty = s, \quad \kappa_0 = s - m + n, \quad \theta = m + n - 1, \tag{3.12}$$

である．

解 (3.11)-(3.12) に変換 s_1 あるいは πs_1 を施すことにより，次の結果を得る．

系 3.2 (3.11) は，パラメータの値が，

$$\kappa_\infty = -s, \quad \kappa_0 = s - m + n, \quad \theta = m + n - 1, \tag{3.13}$$

である場合の有理解にもなっている．さらに，

$$y = \frac{2n+1}{2m+1}\frac{S_{m,n-1}(t,s+1/2)S_{m,n+1}(t,s-1/2)}{S_{m-1,n}(t,s-1/2)S_{m+1,n}(t,s+1/2)}, \tag{3.14}$$

も，$P_{\rm V}$ (1.9) の有理解を与える．ただし，パラメータの値は，

$$\kappa_\infty = m + 1/2, \quad \kappa_0 = n + 1/2, \quad \theta = 2s - m - n - 1, \tag{3.15}$$

である．

Kitaev らは，$P_{\rm V}$ が有理解をもつための必要十分条件を導出し，それらを (I)-(IV) の４つの型に分類した [8]．解 (3.11)-(3.12) および (3.11)-(3.13) は，彼らの分類では (III) 型に，解 (3.14)-(3.15) は (IV) 型に対応している．なお，(I),(II) 型は，Kummer の合流型超幾何関数を用いて表されるタイプの解のうちパラメータを特殊化することにより有理解となるものであり，$P_{\rm IV}$ でいえば Hermite 多項式で表されるものに相当する．したがって，われわれの結果は，各基本領域の重心に存在するタイプの有理解を尽くしていることがわかる．

注 3.3 式 (3.7)-(3.8) を

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t,s)\eta^k = (1+\eta)^{2s-m+n}\exp\left(\frac{-\frac{t}{2}\eta}{1-\eta}\right), \quad p_k = 0 \text{ for } k<0,\\
&\sum_{k=0}^{\infty} q_k(t,s)\eta^k = (1+\eta)^{2s-m+n}\exp\left(\frac{\frac{t}{2}\eta}{1-\eta}\right), \quad q_k = 0 \text{ for } k<0,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

と書き換えればわかるように，多項式 p_k，q_k は Laguerre 多項式である．

注 3.4 定理 3.1 において，$m=0$（または $n=0$）とおけば，Noumi-Yamada による結果 [15] に帰着する．

先に述べたように，$P_{\rm II}$, $P_{\rm III}$, $P_{\rm IV}$ の有理解は Schur 関数を特殊化したものを用いて表される．行列式 (3.9) は，$m=0$（あるいは $n=0$）とおけばわかるように，(2-reduced) Schur 関数のある種の一般化である．果して，この行列式の正体は何であろうか？

実は，行列式 (3.9) は，universal character[9] と呼ばれるものの特殊ケースとなっている．２つの分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)$ が与えられたとき，universal character $S_{\lambda,\mu}=S_{\lambda,\mu}(x,\tilde{x})$ は，次で定義される $x=(x_1,x_2,\cdots)$ および $x=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots)$ についての多項式である．

$$\begin{aligned} S_{\lambda,\mu}(x,\tilde{x}) &= \det{}^t\left(q^-_{\mu_m},q^-_{\mu_{m-1}+1},\cdots,q^-_{\mu_1+m-1},p^+_{\lambda_1-m},p^+_{\lambda_2-m-1},\cdots,p^+_{\lambda_n-m-n+1}\right), \\ p^+_j &= {}^t\left(p_j,p_{j+1},\cdots,p_{j+m+n-1}\right),\quad q^-_j={}^t\left(q_j,q_{j-1},\cdots,q_{j-m-n+1}\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}p_k\eta^k &= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}x_j\eta^j\right),\quad p_k=0 \text{ for } k<0, \\ \sum_{k=0}^{\infty}q_k\eta^k &= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{x}_j\eta^j\right),\quad q_k=0 \text{ for } k<0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

分割および変数を

$$\lambda=(n,n-1,\cdots,1),\quad \mu=(m,m-1,\cdots,1), \tag{3.19}$$

$$x_j=-\frac{t}{2}+\frac{2s-m+n}{j},\quad \tilde{x}_j=\frac{t}{2}+\frac{2s-m+n}{j}, \tag{3.20}$$

と特殊化すれば，われわれの結果 (3.9) に帰着することは明らかであろう．

4 Jacobi-Trudi 表示との比較

第２章で述べたように，τ-コサイクル ϕ_ν $(\nu=(k,l,m,n)\in\mathbb{Z}^4)$ は，一般化された Jacobi-Trudi 公式による表示をもつ．この公式は，(本来の) Schur 関数の Jacobi-Trudi 表示と比べると，行列式の要素が行の添字に依存して変わるような拡張になっている [26]．したがって，この依存性を落とすことにより，(4-reduced) Schur 関数の Jacobi-Trudi 表示に帰着させることができる [12]．これは，具体的には，

$$f_i=\frac{\sqrt{t}}{2},\quad \alpha_i=\frac{1}{4},\quad (i=0,1,2,3), \tag{4.1}$$

と特殊化することで実現できて，

$$\phi_\nu=N_\lambda S_\lambda(2\sqrt{t},-2,0,\cdots), \tag{4.2}$$

となる．ここで，λ は ν により定まるある分割であり，N_λ は定数である．

ところで，(4.1) は，方程式 (2.1)-(2.2) の変換 π の固定点上にある解である．すなわち，(4.2) は，$\mathrm{P_V}$ の有理解の 4-reduced Schur 関数を用いた表示であるといってよい．

しかしながら第３章での議論から明らかなように，(4.2) は $\mathrm{P_V}$ の「重心タイプ」の有理解のすべてを捉えることはできない．それら全体を包括する表示を得るためには，変換 π の固定点上の解 (4.1) ではなく，変換 π^2 の固定点上の解 (3.1) から出発する必要がある．具体的に書き下すと，次の命題が得られる．

命題 4.1 Laguerre 多項式 $L_k^{(\alpha)}(x)$ を用いて，関数 $g_k^{(l)} = g_k^{(l)}(t,s)$ $(k,l \in \mathbb{Z})$ を

$$\begin{aligned} g_{2k}^{(2l)} &= \frac{(-1)^k}{\xi_k} L_k^{(2s-1)}(t/2), \quad g_{2k+1}^{(2l)} = \frac{\sqrt{t}}{2}\frac{(-1)^k}{\xi_{k+1}^{\dagger}} L_k^{(2s^\dagger)}(t/2), \\ g_{2k}^{(2l+1)} &= \frac{(-1)^k}{\xi_k^{\dagger}} L_k^{(2s^\dagger-1)}(t/2), \quad g_{2k+1}^{(2l+1)} = \frac{\sqrt{t}}{2}\frac{(-1)^k}{\xi_{k+1}} L_k^{(2s)}(t/2), \end{aligned} \tag{4.3}$$

で定義する．ただし，

$$\xi_k = \xi_k(s) = \prod_{j=1}^{k}\left(s + \frac{j-1}{2}\right), \quad \xi_k^{\dagger} = \xi_k(s^\dagger), \quad s^\dagger = 1/2 - s, \tag{4.4}$$

である．さらに，$m,n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，関数 $\phi_{m,n} = \phi_{m,n}(t,s)$ を

$$\phi_{m,n}(t,s) = N_{m,n} \det\left(g_{\lambda_j - j + i}^{(m+n+1-i)}\right)_{i,j=1}^{m+n}, \tag{4.5}$$

と定義する．ここで，分割 λ は，

$$\lambda = \begin{cases} (3m-n-1, 3m-n-4, \cdots, 2n+5, 2n+2, 2n, 2n, \cdots, 4, 4, 2, 2), & (m > n), \\ (3n-m, 3n-m-3, \cdots, 2m+3, 2m, 2m, \cdots, 4, 4, 2, 2), & (m \leq n), \end{cases} \tag{4.6}$$

であり，定数 $N_{m,n}$ は，

$$N_{m,n} = \begin{cases} (-1)^{n(n+1)/2} c_m d_n \prod_{k=1}^{n} \hat{\zeta}_k \prod_{k=1}^{m} \zeta_k^{\dagger} \prod_{k=1}^{m-n-1} \hat{\zeta}_k^{\dagger} & (m > n), \\ (-1)^{n(n+1)/2} c_m d_n \prod_{k=1}^{n} \hat{\zeta}_k \prod_{k=1}^{m} \zeta_k^{\dagger} \prod_{k=1}^{n-m} \zeta_k, & (m \leq n), \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} \zeta_k = \prod_{j=1}^{k}(s+j-1), \quad \hat{\zeta}_k = \prod_{j=1}^{k}\left(s + \frac{2j-1}{2}\right), \\ \zeta_k^{\dagger}(s) = \zeta_k(s^\dagger) \quad \hat{\zeta}_k^{\dagger}(s) = \hat{\zeta}_k(s^\dagger), \end{gathered} \tag{4.8}$$

で与えられる．このとき，

$$y = -\frac{\phi_{m,n-1}(t,s)\phi_{m-1,n}(t,s)}{\phi_{m-1,n}(t,s-1)\phi_{m,n-1}(t,s+1)}, \tag{4.9}$$

は，$\mathrm{P_V}$ (1.9) の有理解を与える．ただし，パラメータの値は，

$$\kappa_\infty = s, \quad \kappa_0 = s - m + n, \quad \theta = m + n - 1, \tag{4.10}$$

である．

命題 4.1 における表示 $\phi_{m,n}$ とわれわれの結果 $S_{m,n}$ との関係は，その構成により，

$$\phi_{m,n} = \left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{(m-n-1)(m-n)/2} c_m d_n S_{m,n}, \tag{4.11}$$

と与えられる．この関係は，それぞれの表示を直接比較するかぎり自明ではない．

5 離散 Painlevé 方程式

最後に，離散 Painlevé 方程式との関連について述べよう．対称形式の理論において，アフィン・ワイル群の平行移動による発展を離散力学系と見なしたとき，それがある種の離散 Painlevé 方程式となることが知られている [12]． この事情は P_V でも同じである．まず，(3.9) において，変数およびパラメータを

$$x = t/2, \quad r = 2s - m + n, \quad R^{(r)}_{m,n}(x) = S_{m,n}(t,s), \tag{5.1}$$

と置き換えると，双線形関係式

$$\begin{aligned} -(2n+1)R^{(r+1)}_{m,n+1}R^{(r)}_{m-1,n-1} &= xR^{(r-1)}_{m-1,n}R^{(r+2)}_{m,n} - (r+m+n+1)R^{(r+1)}_{m-1,n}R^{(r)}_{m,n}, \\ -(2n+1)R^{(r)}_{m-1,n+1}R^{(r+1)}_{m,n-1} &= xR^{(r-1)}_{m-1,n}R^{(r+2)}_{m,n} - (r+m-n)R^{(r+1)}_{m-1,n}R^{(r)}_{m,n}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

や

$$\begin{aligned} R^{(r-1)}_{m,n}R^{(r+1)}_{m-1,n-1} + R^{(r-1)}_{m-1,n-1}R^{(r+1)}_{m,n} &= 2R^{(r)}_{m-1,n}R^{(r)}_{m,n-1}, \\ R^{(r+1)}_{m-1,n}R^{(r-1)}_{m,n-1} + R^{(r+1)}_{m,n-1}R^{(r-1)}_{m-1,n} &= 2R^{(r)}_{m,n}R^{(r)}_{m-1,n-1}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

などが得られる（これらは，(2.10),(2.11) に対応している）．変数 X_r, Y_r を

$$X_r = \frac{R^{(r-1)}_{m,n-1}R^{(r+1)}_{m-1,n}}{R^{(r)}_{m-1,n-1}R^{(r)}_{m,n}} - 1, \quad Y_r = 1 - \frac{R^{(r)}_{m,n}R^{(r-2)}_{m-1,n-1}}{R^{(r-1)}_{m,n-1}R^{(r-1)}_{m-1,n}}, \tag{5.4}$$

で導入すると，これらの双線形関係式から，

$$\begin{aligned} X_r + X_{r-2} &= \frac{2}{x}\frac{(r-1)Y_r + (m+n)}{Y_r^2 - 1}, \\ Y_{r+2} + Y_r &= \frac{2}{x}\frac{rX_r + (m-n)}{X_r^2 - 1}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

であることが示せる．これは，asymmetric dP_{II}[1] にほかならない．すなわち，P_V の有理解の τ-関数および Bäcklund 変換から，asymmetric dP_{II} の有理解を構成できたことになる．

さらに，$m = 0$ の場合を考えると，$X_r = -Y_{r+1}$ であることが示せるので，改めて $U_r \equiv X_r = -Y_{r+1}$ とおけば，方程式 (5.5) は，

$$U_{r+1} + U_{r-1} = \frac{2}{x}\,\frac{rU_r - n}{1 - U_r^2}, \tag{5.6}$$

に帰着する．これは，standard dP_{II}[7] にほかならない．

6 まとめ

本稿では，P_V の「重心タイプ」の有理解全体を包括するような行列式表示を構成し，それが Schur 関数のひとつの一般化である universal character を用いて表されることを示した．

講演においては，P_{III} の有理解との関連や退化極限についても触れたが，それらについては文献 [11] に述べてあるので，そちらを参照していただきたい．

今後の課題として，第一に挙げるべきは，なぜ universal character が Painlevé 方程式の解として現れるのかを明らかにすることであろう．Schur 関数が KP ヒエラルキーの有理解の τ-関数として現れることはよく知られているが，universal character を τ-関数とするような可積分ヒエラルキーを構成することも，興味深い課題である．第二に，P_{II}, P_{IV}, P_V の場合に，有理解の Jacobi-Trudi 型表示が一般の τ-コサイクルに拡張できるのと同様に，P_V の有理解の universal character による表示が一般の τ-コサイクルにも拡張できるのではないかと考えられる．第三に，最近提出された対称形式の理論の q-差分版 [4] においても，アフィン・ワイル群として A 型のものを考えれば，q–P_V やその拡張が得られる．それらの解を考察することは興味ある問題であろう．

参考文献

[1] B. Grammaticos, F.W. Nijhoff, V. Papageorgiou, A. Ramani and J. Satsuma, Phys. Lett. **A 185** (1994) 446-452

[2] M. Jimbo and T. Miwa, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943-1001

[3] K. Kajiwara and T. Masuda, Phys. Lett. **A 260** (1999) 462-467

[4] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada, preprint, nlin.SI/0012063

[5] K. Kajiwara and Y. Ohta, J. Math. Phys. **37** (1996) 4693-4704

[6] K. Kajiwara and Y. Ohta, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 2431-2466

[7] K. Kajiwara, K. Yamamoto and Y. Ohta, Phys. Lett. **A 232** (1997) 189-199

[8] A. V. Kitaev, C. K. Law and J. B. McLeod, Diff. and Int. Equations **7** (1994) 967-1000

[9] K. Koike, Adv. Math. **74** (1989) 57-86

[10] T. Masuda, Y. Ohta and K.Kajiwara, submitted to Nagoya Math. J.

[11] 増田哲，梶原健司：数理解析研究所短期共同研究報告集 1170「離散可積分系に関する最近の話題」(2000) 99–110

[12] 野海正俊：パンルヴェ方程式–対称性からの入門–（朝倉書店）

[13] M. Noumi, S. Okada, K. Okamoto and H. Umemura, Proceedings of the Taniguchi Symposium 1997: "Integrable Systems and Algebraic Geometry" eds. M.-H.Saito, Y.Shimizu, K.Ueno, (World Scientific, Singapore, 1998) 349-372

[14] M. Noumi and Y. Yamada, Nagoya Math. J. **153** (1999) 53-86

[15] M. Noumi and Y. Yamada, Phys. Lett. **A 247** (1998) 65-69

[16] M. Noumi and Y. Yamada, Funkcial. Ekvac. **41** (1998) 483-503

[17] M. Noumi and Y. Yamada, Commun. Math. Phys. **199** (1998) 281-295

[18] K. Okamoto, Annali di Matematica pura ed applicata **CXLVI** (1987) 337-381

[19] K. Okamoto, Japan J. Math. **13** (1987) 47-76

[20] K. Okamoto, Math. Ann. **275**(1986) 222-254

[21] K. Okamoto, Funkcial. Ekvac. **30** (1987) 305-332

[22] H. Umemura, Proceeding of the workshop on the Painlevé Transcendents (CRM, Montreal, Canada, 1996)

[23] H. Umemura, Proceeding of the workshop on the Painlevé Transcendents (CRM, Montreal, Canada, 1996)

[24] H. Umemura and H. Watanabe, Nagoya Math. J. **148** (1997) 151-198

[25] A. P. Vorob'ev, Diff. Eq. **1** (1965) 58-59

[26] Y. Yamada, Nagoya Math. J. **156** (1999) 123-134